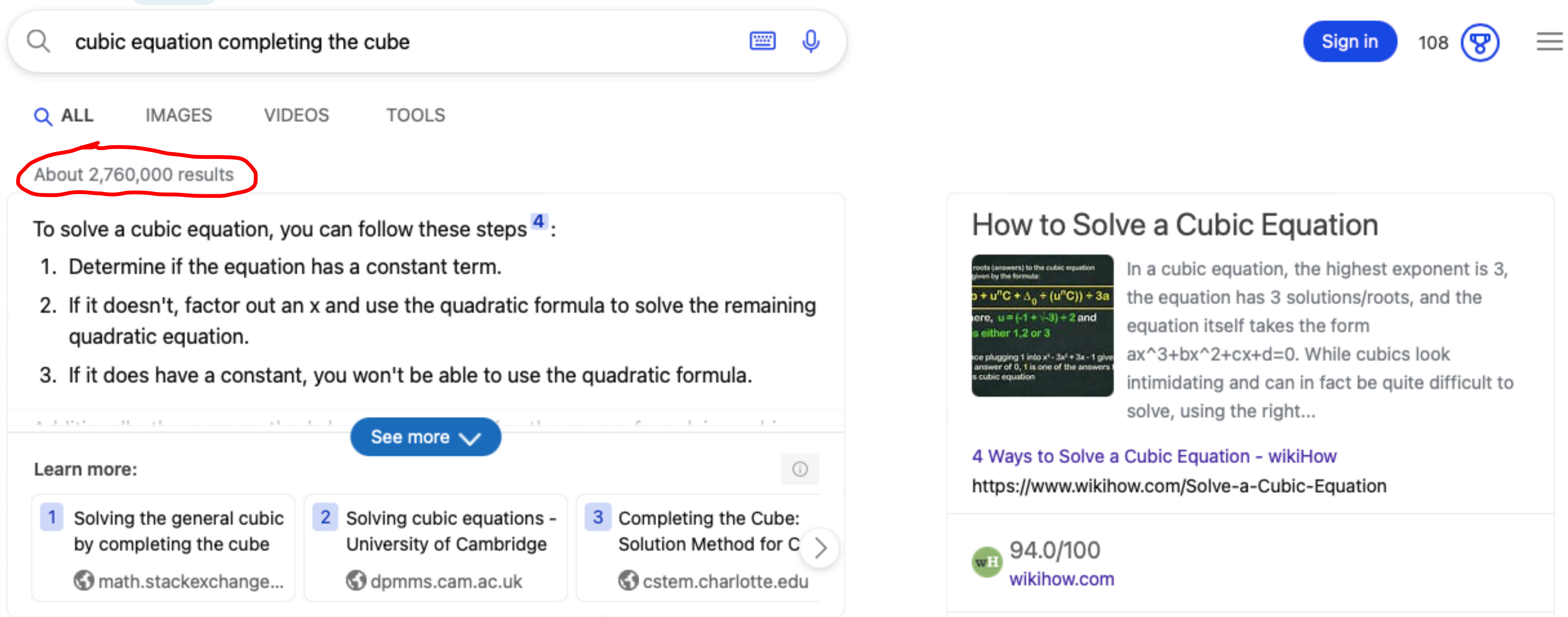
线性代数的有趣例子
—用配方法求解高次方程

黄华林

福建省第24届代数课程建设研讨会，三明学院

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Can one solve cubic equations by completing the cube?


cubic equation completing the cube
Sign in
108
ALL
IMAGES
VIDEOS
TOOLS
About 2,760,000 results
To solve a cubic equation, you can follow these steps 4 :
1. Determine if the equation has a constant term.
2. If it doesn't, factor out an x and use the quadratic formula to solve the remaining quadratic equation.
3. If it does have a constant, you won't be able to use the quadratic formula.
See more
Learn more:
1 Solving the general cubic by completing the cube
math.stackexchange...
2 Solving cubic equations - University of Cambridge
dpmms.cam.ac.uk
3 Completing the Cube: Solution Method for C
cstem.charlotte.edu
How to Solve a Cubic Equation
In a cubic equation, the highest exponent is 3, the equation has 3 solutions/roots, and the equation itself takes the form ax^3+bx^2+cx+d=0. While cubics look intimidating and can in fact be quite difficult to solve, using the right...
4 Ways to Solve a Cubic Equation - wikiHow
https://www.wikihow.com/Solve-a-Cubic-Equation
94.0/100
wikihow.com

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \overset{?}{=} a(x+s)^3 + t$$

一般不能这样配立方！

二次方程与二次型

$$ax^2 + bx + c \leftrightarrows ax^2 + bxy + cy^2$$

三次方程与三次型

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \leftrightarrows a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$$

如何配立方？

$$a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 \overset{?}{=} (\alpha_1x + \beta_1y)^3 + (\alpha_2x + \beta_2y)^3$$

三次方程配方化简

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=(\alpha_1x+\beta_1)^3+(\alpha_2x+\beta_2)^3$$

二次型配平方⇔对称双线性型的正交直和分解

$$\text{三次型} \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijk}x_ix_jx_k \Leftrightarrow \text{对称三线性型}$$

$$\Theta : V \times V \times V \to \mathbb{K}$$

$$(e_i, e_j, e_k) \mapsto a_{ijk}$$

$$\mathrm{Z}(\Theta) = \{\phi \in \mathrm{End}\, V \,|\, \Theta(\phi v_1, v_2, v_3) = \Theta(v_1, \phi v_2, v_3), \forall v_i \in V\}$$

$$\mathrm{Z}(f) = \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} \,|\, (HX)^T = HX\}, \text{其中} H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

小结：以上定义的$Z(\Theta)$和$Z(f)$称为型的中心（**Harrison，1975**），可视为对称矩阵的推广，描述Θ和f的对称性。

例1：设$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. 则其Hessian矩阵为纯量阵，故其中心为对称矩阵的全体。

例2：设$d > 2$，令$f = x_1^d + x_2^d + \cdots + x_n^d$.
则f的Hessian矩阵为对角阵，易知其中心为对角矩阵的全体。

观察：对角化的型，其中心有足够多的投影变换，或幂等矩阵。

思路：对于一般的型（含有复杂的交叉项），通过其中心找投影算子或幂等矩阵！

结论1: 令$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$.

则 $f = (\alpha_1 x + \beta_1 y)^3 + (\alpha_2 x + \beta_2 y)^3$当且仅当

$Z(f)$由一对正交幂等矩阵线性张成.

Z(*f*)由以下形式矩阵组成：

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

结论2: 令$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$.

则一般地$Z(f)$由一对正交幂等矩阵线性张成.

若不然, $Z(f)$含有一个平方零矩阵, 等价于f含有重复因式.

结论3. 给定2元3次型，计算其中心，将中心中非单位阵相似对角化，利用该过渡矩阵可以将该型对角化。若中心中非单位阵不能对角化，则该型有重复因子。将型的结论转换为3次方程，立可求解三次方程。

三次方程求根公式

* 符号约定：$D_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$， $D_2=\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$， $D_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

* 定理：设$f(x)=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$, 且$D_2^2-4D_1D_3\neq 0$.则

$$f(x)=\frac{\lambda_2a_0-D_1a_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(x+\frac{\lambda_1}{D_1}\right)^3+\frac{\lambda_1a_0-D_1a_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(x+\frac{\lambda_2}{D_1}\right)^3.$$

由此易得$f(x)=0$的根为

$$x_i=\frac{\gamma\omega^i\lambda_1-\lambda_2}{D_1(1-\gamma\omega^i)},\quad i=0,1,2.$$

其中

$$\gamma=\sqrt[3]{\frac{\lambda_2a_0-D_1a_1}{\lambda_1a_0-D_1a_1}},\quad \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

卡当公式

对于方程 $x^3+px+q=0$ 使用以上定理，得

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{3}{p}\frac{\lambda_1^{\frac{2}{3}}\lambda_2^{\frac{1}{3}}-\lambda_2}{1-\lambda_1^{-\frac{1}{3}}\lambda_2^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{p}(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{1}{3}}\frac{\lambda_1^{\frac{2}{3}}-\lambda_2^{\frac{2}{3}}}{\lambda_1^{\frac{1}{3}}-\lambda_2^{\frac{1}{3}}}=(-\lambda_2)^{\frac{1}{3}}+(-\lambda_1)^{\frac{1}{3}}\\
&= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}
$$

注记：卡当公式中被开立方的项其实是相应三次型中心代数的一个生成矩阵的特征值！

总结

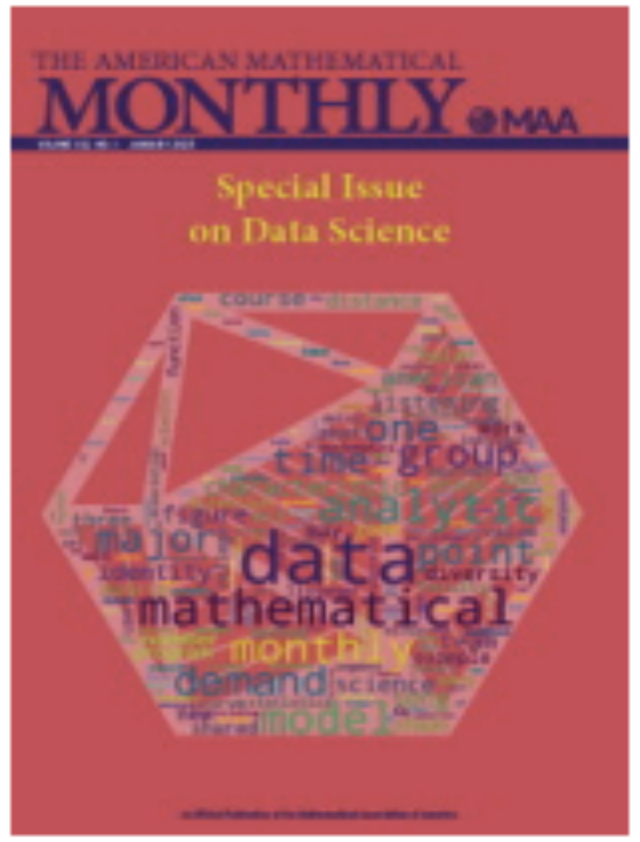
* 可以利用该思路解决三次曲线的分类问题，该问题是解析几何的重要成就，最早由牛顿给出。

* 可以将该方法拓展到一般高次方程
$$a_0x^d + \binom{d}{1}a_1x^{d-1} + \cdots + \binom{d}{d-1}a_{d-1}x + a_d \overset{?}{=} (\alpha_1x+\beta_1)^d + (\alpha_2x+\beta_2)^d.$$

* 也许可以作为学生大作业案例，拓展二次型到高次型，将矩阵拓展到张量，体现课程的两性一度。

* 卡当公式最早由**Tartaglia**巧妙地利用恒等式$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$推导出。后续有利用**Sylvester**的二元型标准型（华林分解）来推导的办法，**MIT**教授**Rota**、陈永川院士等利用该方法给出方程配立方、卡当公式的重新推导。

参考文献



Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

The American Mathematical Monthly

ISSN: (Print) (Online) Journal homepage: www.tandfonline.com/journals/uamm20

Solving Algebraic Equations by Completing Powers

Hua-Lin Huang, Shengyuan Ruan, Xiaodan Xu & Yu Ye

To cite this article: Hua-Lin Huang, Shengyuan Ruan, Xiaodan Xu & Yu Ye (02 Dec 2024): Solving Algebraic Equations by Completing Powers, The American Mathematical Monthly, DOI: 10.1080/00029890.2024.2421145

To link to this article: https://doi.org/10.1080/00029890.2024.2421145

Thank You!

敬请批评指正！